数理解析研究所講究録
第1696巻 2010年 94-106



# 2次元全空間における Poisson 方程式について

眞崎聡

学習院大学理学部数学科
masaki@math.gakushuin.ac.jp

## 1 序

本稿では, 2次元全空間における Poisson 方程式

$$-\Delta P=f \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \tag{1.1}$$

を考察する. 我々は次のような条件の下で考える.

$$|\nabla P|\to 0 \text{ as } |x|\to\infty, \quad P(0)=0, \tag{1.2}$$

$$\nabla P\in L^{\infty}(\mathbb{R}^2). \tag{1.3}$$

初めに, 空間次元 $n$ が3以上の場合 (1.1) を考える際に課される条件について簡単にまとめておこう. この場合 (1.1) の解 $P$ は Fourier 変換を用いるかもしくは Newton 核との合成積によって

$$P(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2}\mathcal{F}f(\xi)\right](x) \tag{1.4}$$

$$=\frac{1}{n(n-2)\omega_n}(|x|^{2-n}*f)(x), \tag{1.5}$$

のように与えられることはよく知られている. 但し $\omega_n$ は $\mathbb{R}^n$ の単位球の体積を表す. この場合, 方程式 (1.1) は $\mathbb{R}^n$ において

$$P\to 0 \text{ as } |x|\to\infty, \quad P\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{1.6}$$

という条件の下で考えられている. 性質の良い $f$(例えば $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) に対して, (1.4) または (1.5) で与えられる解は条件 (1.6) を満たす. 特に $P$ の有界性に関する条件があると Liouville の定理からその解は一意である.

一方2次元では, 一般に解を (1.4) によって与えるのは不可能である. なぜならば, $|\xi|^{-2}$ のもつ特異性により (超関数の意味でも) 意味を持たないからである. $\xi\to 0$ のとき $\mathcal{F}f(\xi)=O(|\xi|)$ になるように $f$ にいくらかの

条件を課せば (1.4) の定義を採用することもできる．しかし，このためには次の積分平均がゼロという条件がほとんど必要である:

$$2\pi \mathcal{F} f(0) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = 0. \tag{1.7}$$

この条件は幾分強いものである．例えば，偏微分方程式の研究においては考えている物理モデルに応じて $f \geqslant 0$ が要求されることがある．例えば $f$ が電荷密度を表す場合などである．このとき，条件 (1.7) を課してしまうと，$f \equiv 0$ という自明なものしか考えることができなくなる．このような理由から (1.7) を課さずに 2 次元全空間の場合を考察したい．また，(1.5) の 2 次元版に相当する

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log|x-y| f(y)dy$$

は条件 (1.7) を課さなくても定義されるものの，有界な関数にならないため，一意性が不明である．

本稿における我々の目的は (1.7) を必要としない (1.1) の解を与え，その一意性について考察することである．具体的には，条件 (1.2)–(1.3) を満たす新しい解について考察する．それは (1.7) を必要とせず，(1.4) や (1.5) を考える場合よりも広いクラスの $f$ に対して定義されることが分かる．また (1.2)–(1.3) という条件のもと (1.1) の解は一意になる．我々のアイデアは

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{-i\xi}{|\xi|^2}\mathcal{F}f(\xi)\right](x) \tag{1.8}$$

という量に注目することである．これは形式的には (1.1) の解を $P$ とするとその勾配 $\nabla P$ に相当するものであるが，特異性がそれほど強くないので 2 次元の場合にも定義可能である．もしこの量が一意に定まっているなら，ある一点の情報 (例えば $P(0) = 0$) から線積分によって (1.1) の解が一意に構成できるはずである．この方針に則ると，(1.6) の代わりに (1.2)–(1.3) という条件が導かれる．この解は [2] で導入された．

また，$m, r > 0$ に対して質量項を持つ Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta Q_m + mQ_m = f, & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ Q_m \to 0 \text{ as } |x| \to \infty, & Q_m \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \end{cases} \tag{1.9}$$

の解と，原点を中心とし半径 $r$ の球 $B_r := \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ における Dirichlet 問題

$$\begin{cases} -\Delta R_r = f, & \text{in } B_r \\ R_r = 0, & \text{on } \partial B_r \end{cases} \tag{1.10}$$

の解とを考え，それらの解における，それぞれ $m \downarrow 0$, $r \to \infty$ という極限が (1.2)–(1.3) を満たす (1.1) の解とどのような関係を持つか考察する．

## 2 可解性と解の一意性

本節でまず, (1.2)-(1.3) という条件を課した際の (1.1) の可解性についての結果を紹介する. 以後, 実数 $p < 2$ に対して $p^* = 2p/(2-p)$ と書くことにする. $p^*$ は $p$ に関して単調増加であり, $1^* = 2$ となることに注意. また, BMO 空間を

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^2) = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \mid \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^2)} < \infty\},$$
$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^2)} = \sup_{B:\text{ball in } \mathbb{R}^2} \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - c| dx$$

と定める. BMO 空間に関しては, [5, 8] が詳しい.

**定理 2.1** ([2]). ある $p_0 \in (1,2)$ に対して $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ となるならば,

$$P(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\log \frac{|x-y|}{|y|}\right) f(y) dy \tag{2.1}$$

は全ての $x \in \mathbb{R}^2$ で意味を持ち, (1.2) を満たす. $P$ の弱微分

$$\nabla P(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} f(y) dy \in L^{p_0^*}(\mathbb{R}^2) \tag{2.2}$$

は全ての $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ に対して $\langle \nabla P, \nabla \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ を満たす.

- さらにもし $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ならば $P \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^2)$ となり, ある定数 $C$ が存在して
$$\|P\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^2)} \leqslant C \|f\|_{L^1} \tag{2.3}$$
が成立. また, 遠方での発散について
$$\limsup_{|x| \to \infty} \frac{|P(x)|}{\log |x|} \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{2\pi} \tag{2.4}$$
という評価が成立.

- 条件 $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ に加えて $f$ は連続であって, ある $q_0 > 2$ に対して $\nabla f \in L^{q_0}(\mathbb{R}^2)$ となるとする, このとき $P$ は $C^2(\mathbb{R}^2)$ に属し条件 (1.2)-(1.3) の下での (1.1) の一意古典解になる. また, $P$ は $\nabla P \in L^r(\mathbb{R}^2)\ \forall r \in [p_0^*, \infty]$, $\nabla^2 P \in L^p(\mathbb{R}^2)\ \forall p \in [p_0, \infty]$, $\nabla^3 P \in L^{q_0}(\mathbb{R}^2)$ を満たす.

注意 2.2. 作用素 $\nabla(-\Delta)^{-1} := \mathcal{F}^{-1} i\xi/|\xi|^2 \mathcal{F}$ は任意の $p_0 \in (1,2)$ に対して $L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ から $L^{p_0^*}(\mathbb{R}^2)$ への有界作用素になる. ここで, (1.8) と (2.1) はどちらも $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$, $p_0 \in (1,2)$ という条件の下で意味をなす. この意味において (2.1) は (1.8) の "適切な" 積分の一つだと言うことができる. また, 同じ意味において Newton ポテンシャル $-(2\pi)^{-1}(\log|x| * f)$ は適切な積分ではない (以下の命題 2.4 を参照).

注意 2.3. $\nabla P \notin L^2(\mathbb{R}^2)$ は一般には成立せず, $\nabla P \in L^2(\mathbb{R}^2)$ となるのは $f$ が (1.7) の条件を満たすときに限る. これは $\|\nabla P\|_{L^2} = \big\||\xi|^{-1}\mathcal{F}f\big\|_{L^2}$ から分かる.

以下の証明はほとんど [2] のものと同じである. 違いは (2.3) の評価が加わっていることである.

*Proof.* **第 1 段**. まず初めに, $\log|x| \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ がすべての $1 \leqslant p < \infty$ に対して成立し, したがって $|y| \to \infty$ のとき $\log(|x-y|/|y|) = O(|y|^{-1})$ であることに注意する. このことから, 任意の固定された $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $\log(|x-y|/|y|) \in L_y^{p_0/(p_0-1)}(\mathbb{R}^2)$ であることが直ちに従い, それゆえ Hölder 不等式から $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ ならば $P$ の定義は意味を持つ. $P$ の弱微分が (2.2) で与えられることは容易に確かめられる. Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式から, (2.2) は $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ のときに確かに意味を持ち, さらに $L^{p_0^*}(\mathbb{R}^2)$ に属する関数になる. このとき (1.2) が満たされていることもわかる. ここで $\mathcal{F}(x/|x|^2) = -i\xi/|\xi|^2$ が成立するので $\nabla P = \mathcal{F}^{-1}[(i\xi/|\xi|^2)\mathcal{F}f]$ は (1.1) の超関数解であることがわかる.

**第 2 段**. 次に, $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ という仮定を加えて (2.3) 式と (2.4) 式を証明する. 最初に (2.3) 式を示す. $B = B(x_0, r)$ を $\mathbb{R}^2$ 内の球とする. $x \in B$ として $P$ を次のような 3 つの部分に分解する:

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(x_0,2r)} \log\frac{|x-y|}{|y|} f(y)dy,\\
P_2(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{B(x_0,2r)} (\log|x-y|) f(y)dy,\\
P_3 &= \frac{1}{2\pi}\int_{B(x_0,2r)} (\log|y|) f(y)dy.
\end{aligned}
$$

ここで, $P_i$ は $B$ 上ですべて有界であり, $P(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3$ をみたしている. また $P_3$ は定数である. 定数 $c_1$, $c_2$ を

$$
c_1 := P_1(x_0), \quad c_2 := -\frac{1}{2\pi}\int_{B(x_0,2r)} \left(\log\frac{3r}{\sqrt{2}}\right) f(y)dy
$$

ととる. このとき,

$$
\begin{aligned}
\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{B(x_0,r)} |P(x)-c|dx &\leqslant \int_{B(x_0,r)} |P(x) - (c_1 + c_2 + P_3)|dx\\
&\leqslant \int_{B(x_0,r)} |P_1(x) - c_1|dx + \int_{B(x_0,r)} |P_2(x) - c_2|dx\\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

である. $I_1$ を評価しよう. 定義から,

$$I_1 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{B(x_0,r)}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(x_0,2r)}\left|\log\frac{|x-y|}{|x_0-y|}\right||f(y)|dydx$$

が成立するが, この式の右辺は次のように書ける:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(x_0,2r)}\left(\int_{B(0,r)}\left|\log\frac{|z+(x_0-y)|}{|x_0-y|}\right|dz\right)|f(y)|dy.$$

ここで, $|x_0-y|\geqslant 2r$ という条件下では

$$\sup_{z\in B(0,r)}\left|\log\frac{|z+(x_0-y)|}{|x_0-y|}\right| = \log\frac{|x_0-y|}{|x_0-y|-r}$$

が成立することと, $\sup_{\rho,\rho\geqslant 2r}\log(\rho/(\rho-r)) = \log 2$ が成立することに注意すると,

$$I_1 \leqslant \frac{\log 2}{2\pi}\|f\|_{L^1}|B(x_0,r)|.$$

を得る. 一方, $I_2$ に対しては

$$I_2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{B(x_0,2r)}\left(\int_{B(x_0,r)}\left|\log\frac{\sqrt{2}|x-y|}{3r}\right|dx\right)|f(y)|dy$$

という評価が成り立つ. ここで $x\in B(x_0,r)$ かつ $y\in B(x_0,2r)$ のとき $x\in B(y,3r)$ となるので,

$$\int_{B(x_0,r)}\left|\log\frac{\sqrt{2}|x-y|}{3r}\right|dx \leqslant \int_{B(0,3r)}\left|\log\frac{\sqrt{2}|x|}{3r}\right|dx = \frac{9\pi r^2}{2}\log 2$$

を得る. ゆえに

$$I_2 \leqslant \frac{9}{4\pi}(\log 2)\|f\|_{L^1}|B(x_0,r)|$$

がわかり, $I_1$ の評価と合わせると

$$\|P\|_{BMO} \leqslant \sup_{B:\text{ball}}\frac{1}{|B|}(I_1+I_2) \leqslant \left(\frac{11}{4\pi}\log 2\right)\|f\|_{L^1}$$

を得る.

次に (2.4) 式を示す. ここで $K(x,y) := \log\frac{|x-y|}{\langle y\rangle}$ とおいて

$$K_1(x,y;\delta) := \mathbf{1}_{\{|x-y|\geqslant\delta\}}K(x,y), \quad K_2(x,y;\delta) := \mathbf{1}_{\{|x-y|\leqslant\delta\}}K(x,y),$$

と定める. 但し $\langle y\rangle = \sqrt{1+|y|^2}$ であり, 定数 $\delta\in(0,1]$ の値は後で決めるものとする. 最初に

$$\sup_y|K_1(x,y;\delta)| \leqslant \log\langle x\rangle + \log\sqrt{3} + \log\frac{1}{\delta}, \qquad \forall x\in\mathbb{R}^2 \tag{2.5}$$

であることを示そう．以後, $x-y=-w$ とかく．$K_1$ の台は $w$ を用いると $\{|w|\geqslant\delta\}$ と表わせる．三角不等式から

$$\log\frac{|w|}{\sqrt{1+(|w|+|x|)^2}}\leqslant\log\frac{|w|}{\langle w+x\rangle}\leqslant\log\frac{|w|}{\sqrt{1+(|w|-|x|)^2}}$$

を得る．ここで, 左辺は常に負の値をとり, $|w|\geqslant\delta$ の範囲で $|w|$ に関して単調増加である．ゆえに以下の評価が成り立つ:

$$\begin{aligned}\left|\log\frac{|w|}{\sqrt{1+(|w|+|x|)^2}}\right| &\leqslant -\log\frac{\delta}{\sqrt{1+(\delta+|x|)^2}}\\ &\leqslant \log\sqrt{3}+\log\langle|x|\rangle+\log\frac{1}{\delta}.\end{aligned}$$

最後の不等式において $\delta\in(0,1]$ に対しては $1\leqslant 1+(\delta+|x|)^2\leqslant 3(1+|x|^2)$ が成立することを用いた．一方, 右辺は $\delta\leqslant|w|\leqslant|x|+1/|x|$ の範囲では $|w|$ に関して単調増加で $|w|\geqslant|x|+1/|x|$ の範囲で $|w|$ に関して単調減少, さらに $|w|\to\infty$ のときには 0 に収束する．以上から,

$$\left|\log\frac{|w|}{\sqrt{1+(|w|-|x|)^2}}\right|\leqslant\max\left(\log\langle x\rangle\,,-\log\frac{\delta}{\sqrt{1+(\delta-|x|)^2}}\right)$$

が分かる．ここで

$$-\log\frac{\delta}{\sqrt{1+(\delta-|x|)^2}}\leqslant\log\sqrt{2}+\log\langle|x|\rangle+\log\frac{1}{\delta}$$

なので (2.5) が従う．評価 (2.5) を使うと

$$\frac{\left|\int_{\mathbb{R}^2}K_1(x,y;\delta)f(y)dy\right|}{\log\langle x\rangle}\leqslant\|f\|_{L^1}+\frac{\|f\|_{L^1}\,(\log\sqrt{3}+\log(1/\delta))}{\log\langle x\rangle}$$

が直ちに得られる．他方, $|w|\leqslant\delta\leqslant 1$ において $\langle|x+w|\rangle\leqslant\sqrt{3}\,\langle x\rangle$ という事実を使うと

$$\begin{aligned}\|K_2(x,\cdot;\delta)\|_{L^q_y} &\leqslant \|\log\langle w+x\rangle\|_{L^q(|w|\leqslant\delta)}+\|\log|w|\|_{L^q(|w|\leqslant\delta)}\,,\\ &\leqslant (\pi\delta^2)^{\frac{1}{q}}(\log\langle x\rangle+\log\sqrt{3})+\|\log|w|\|_{L^q(|w|\leqslant\delta)}\end{aligned}$$

が言える．ここで $q=p_0/(p_0-1)$ である．この式から

$$\begin{aligned}\frac{\left|\int_{\mathbb{R}^2}K_2(x,y;\delta)f(y)dy\right|}{\log\langle x\rangle} &\leqslant (\pi\delta^2)^{\frac{1}{q}}\,\|f\|_{L^{p_0}}\\ &\quad+\|f\|_{L^{p_0}}\,\frac{(\pi\delta^2)^{\frac{1}{q}}\log\sqrt{3}+\|\log|w|\|_{L^q(|w|\leqslant\delta)}}{\log\langle x\rangle}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

が成立することが分かる．さて，いま $\delta = (\log\langle x\rangle)^{-1}$ としよう．このとき (2.5) と (2.6) を合わせると $|x| \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{|P(x)|}{\log\langle x\rangle} &\leqslant \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^2} K_1(x,y;(\log\langle x\rangle)^{-1})f(y)dy\right|}{2\pi\log\langle x\rangle} \\ &\quad + \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^2} K_2(x,y;(\log\langle x\rangle)^{-1})f(y)dy\right|}{2\pi\log\langle x\rangle} + \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^2}\log(\frac{\langle y\rangle}{|y|})f(y)dy\right|}{2\pi\log\langle x\rangle} \\ &\to \frac{\|f\|_{L^1}}{2\pi}\end{aligned}$$

が得られる．ここで $\log(\langle y\rangle/|y|) \in L^{p_0/(p_0-1)}(\mathbb{R}^2)$ を用いた．以上より前半部の証明が終わる．

**第 3 段**．定理の後半の主張を示す．ここで次の事実に注意する：任意の $j,k,l \in \{1,2\}$ に対して

$$\partial_j\partial_k P = -R_jR_kf, \quad \partial_j\partial_k\partial_l P = -R_jR_k\partial_l f,$$

但し $R_j$ は Riesz 変換 $\mathcal{F}^{-1}(i\xi_j/|\xi|)\mathcal{F}$ を表すものとする．さて $1 < p < \infty$ に対する Riesz 変換の $L^p$-有界性 (たとえば [4] を参照) を用いれば，

$$\partial_j\partial_k P \in L^p(\mathbb{R}^2),\ \forall p \in [p_0,\infty), \quad \partial_j\partial_k\partial_l P \in L^{q_0}(\mathbb{R}^2)$$

を得る．このとき，Gagliardo-Nirenberg 不等式から $\partial_j\partial_k P \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ も従う．また，ここで Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式を用いると，$\nabla P \in L^r(\mathbb{R}^2)$ が $r \in [q_0,\infty)$ わかり，$\nabla P \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ も Hölder 不等式を用いると証明できる．さらに，連続性の議論から $P \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

最後に古典解の一意性を示す．$P_1, P_2$ を条件 (1.2)–(1.3) を満たす (1.1) の古典解であるとする．このとき，$w := P_1 - P_2$ は調和関数である．$\Delta w = 0$ を $x_1$ で微分すれば，$\partial_1 w$ も同様に $\mathbb{R}^2$ 上の調和関数であることが分かる．しかし我々は $\partial_1 w$ が有界であることを知っているので，$\partial_1 w$ は定数である．再び条件から $\partial_1 w \to 0(|x| \to \infty)$ なので，つまり $\partial_1 w \equiv 0$ であることが結論づけられる．全く同様の議論から $\partial_2 w \equiv 0$. それゆえ，$w$ は定数であることがわかり，$w(x) \equiv w(0) = 0$ を得る．これは $P_1 \equiv P_2$ であることを意味する． □

## 2.1 Newton ポテンシャルについて

我々は Newtonian ポテンシャル

$$\widetilde{P}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(\log|x-y|)f(y)dy \tag{2.7}$$

がPoisson方程式の解としてどのようなものかを明確にすることができる．2次元においては $-\frac{1}{2\pi}\log|x|$ がNewton核なので，この $\widetilde{P}$ は(1.5)の2次元版に相当していることに注意する．

**命題 2.4.** $f$ はある $p_0 \in (1,2)$ に対して $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ となっているものとし，$\widetilde{P}$ は(2.7)式で与えられるものとする．もし $\widetilde{P}(x)$ がある点 $x \in \mathbb{R}^2$ で有界ならば，それはすべての $x \in \mathbb{R}^2$ において有限な値となり，さらに $\widetilde{P}(x) = P(x) + \widetilde{P}(0)$ となる．ここに $P$ は定理 *2.1* の(2.1)式で与えられる条件(1.2)–(1.3)の下での(1.1)の解である．

これから以下のことが分かる:

- $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ とする．もし $\widetilde{P}(x)$ がある一点 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ で発散するならば，全ての点 $x \in \mathbb{R}^2$ において発散．
- $P$ と $\widetilde{P}$ の差は単なる定数 $\widetilde{P}(0)$ である．しかし $\widetilde{P}$ を考える際には，この定数が有限であることを保証するために $f$ に関する付加条件が必要になる．
- $\widetilde{P}$ も(2.3)と(2.4)を満たす．
- もし $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ が $|\widetilde{P}(0)| < \infty$ を満たすものであれば，$\widetilde{P}$ は(1.1)の弱解であって $P(0) = \widetilde{P}(0)$ と $|x| \to \infty$ のとき $|\nabla P| \to 0$ という条件を満たす．

証明は明らかである．任意の $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ $(p_0 \in (1,2))$ と $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\log\frac{|x_1-y|}{|x_2-y|}\right)f(y)dy$$

は有限であることに注意すればよい．

注意 2.5. $\widetilde{P}$ に対する(2.3)の評価は[5]でも紹介されているが、そこでは $f \in L^1$ のみが仮定されている．実際に(2.3)式の右辺は $L^1$ ノルムだけで抑えられているものの，この条件だけでは不十分で，ここで述べたように $\widetilde{P}$ が至る所で発散してしまい関数として意味を成さない場合がある．

# 3　収束についての注意

この節では(1.9), (1.10)の解の極限と(2.1)で与えられる解 $P$ との関係を考察する．

### 3.1 (1.9) の解の収束

**定理 3.1.** $f$ はある $p_0 \in (1,2)$ に対して $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ であると仮定する. $P$ を (2.1) で定まる (1.1) の解とし, $Q_m$ を

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2+m}\mathcal{F}f\right](x)$$

で定まる (1.9) の解とする. $m \downarrow 0$ のとき以下が成立.

- $Q_m(x) - Q_m(0)$ は $P(x)$ に広義一様収束.
- 任意の $q \in (p_0^*, \infty]$ に対し, $\nabla Q_m$ は $\nabla P$ に $L^q(\mathbb{R}^2)$ 収束.
- $\nabla Q_m$ は $\nabla P$ に弱 $L^{p_0^*}(\mathbb{R}^2)$ 収束.

*Proof.* まず $q \in (p_0^*, \infty]$ に対して $m \downarrow 0$ のとき $\nabla Q_m$ は $\nabla P$ に $L^q$ 収束することを示す. $Q_m$, $P$ の定義から

$$\begin{aligned}\|\nabla Q_m - \nabla P\|_{L^q} &\leqslant C\left\|\frac{m}{(|\xi|^2+m)|\xi|}|\mathcal{F}f|\right\|_{L^{q'}}\\ &\leqslant C\left\|\frac{m}{(|\xi|^2+m)|\xi|}\right\|_{L^{\frac{qp_0}{q-p_0}}}\|f\|_{L^{p_0}}\end{aligned}$$

が従う. ここで $1 < p_0 < 2 < p_0^* < q \leqslant \infty$ であることに注意. いま $\widetilde{p} := qp_0/(q-p_0)$ とかくと, $q$ に関する条件から $p_0 \leqslant \widetilde{p} < 2$ である. ここで,

$$\left\|\frac{m}{(|\xi|^2+m)|\xi|}\right\|_{L^{\widetilde{p}}} = m^{\frac{1}{\widetilde{p}}-\frac{1}{2}}\left\|\frac{1}{(|\xi|^2+1)|\xi|}\right\|_{L^{\widetilde{p}}}$$

であって, $\widetilde{p}$ の条件より右辺の積分は有界である. 以上により, $m \downarrow 0$ のとき $\|\nabla Q_m - \nabla P\|_{L^q} \to 0$ であることが分かる.

次に $\nabla Q_m$ が $\nabla P$ に弱 $L^{p_0^*}$ 収束することを示す. すでに $L^\infty$ ノルムで強収束することが分かっているので, $\nabla Q_m - \nabla P$ が $L^{p_0^*}$ ノルムに関して一様に有界であることを示せば十分. いま,

$$\begin{aligned}\nabla Q_m - \nabla P &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{im\xi}{(|\xi|^2+m)|\xi|^2}\mathcal{F}f(\xi)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{-m}{(|\xi|^2+m)}\mathcal{F}(\nabla P)(\xi)\right]\\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{-1}{(|m^{-\frac{1}{2}}\xi|^2+1)}\left(\frac{1}{m}\mathcal{F}\left[\nabla P(m^{-\frac{1}{2}}\cdot)\right](m^{-\frac{1}{2}}\xi)\right)\right]\\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{-1}{(|\xi|^2+1)}\mathcal{F}\left[\nabla P(m^{-\frac{1}{2}}\cdot)\right](\xi)\right](m^{\frac{1}{2}}x)\end{aligned}$$

と書ける．$\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ が $L^{p_0^*}$ から $L^{p_0^*}$ への有界作用素であるので (たとえば [4] を参照),

$$\|\nabla Q_m - \nabla P\|_{L^{p_0^*}} = m^{-\frac{1}{p_0^*}} \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(|\xi|^2+1)}\mathcal{F}\left[\nabla P(m^{-\frac{1}{2}}\cdot)\right]\right]\right\|_{L^{p_0^*}}$$
$$\leqslant Cm^{-\frac{1}{p_0^*}} \left\|\nabla P(m^{-\frac{1}{2}}\cdot)\right\|_{L^{p_0^*}} = C\,\|\nabla P\|_{L^{p_0^*}}$$

となる．

最後に $\mathbb{R}^2$ 内の任意の有界集合 $\Omega$ に対して $Q_m(x)-Q_m(0)$ が $P(x)$ に $L^\infty(\Omega)$ の位相で収束することを示す．原点を中心とし半径 $r$ の球を $B_r$ と表す．$\Omega \subset B_{r_0}$ が成立するよう $r_0$ を十分大きくとる．このとき, $P(0)=0$ であることに注意すると, $m \downarrow 0$ のとき

$$\|Q_m - Q_m(0) - P\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\| \int_0^1 x\cdot((\nabla Q_m - \nabla P)(rx))dr \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$
$$\leqslant r_0\,\|\nabla Q_m - \nabla P\|_{L^\infty} \to 0.$$

□

この定理と命題 2.4 から次が直ちに得られる．

**系 3.2.** $f$ はある $p_0 \in (1,2)$ に対して $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ であると仮定する．$Q_m$ を $\mathcal{F}^{-1}\left[(|\xi|^2+m)^{-1}\mathcal{F}f\right]$ で定まる (1.9) の解とする．$Q_m$ が (2.7) 式で与えられる *Newton* ポテンシャル $\widetilde{P}$ に $m \downarrow 0$ のとき広義一様収束するための必要十分条件は, $\lim_{m\downarrow 0} Q_m(0)$ と $\widetilde{P}(0)$ がともに有限の値を持ちそれらが等しいこと, つまり

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{|\xi|^2}\mathcal{F}f(\xi)d\xi = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(\log|y|)f(y)dy \tag{3.1}$$

が成立することである．

等式 (3.1) は一般には成立しない．例えば $f(x)=e^{-|x|^2/2}$ ととると, (3.1) の右辺は有限の値になる．一方, $\mathcal{F}f(\xi)=e^{-|\xi|^2/2}$ であるが $\xi=0$ での特異性から左辺は有限な値とはならない．本稿では詳しくは述べないが, (3.1) が成立するための一つの十分条件を紹介する．

**定理 3.3.** 関数 $f$ が *Hardy* 空間 $\mathcal{H}^1$ に属するとき (3.1) が成立．

これと系 3.2 から直ちに次を得る．

**定理 3.4.** $f \in \mathcal{H}^1 \cap L^{p_0}$ $(1<p_0<2)$ ならば $Q_m$ は $m \downarrow 0$ のとき $\widetilde{P}$ に広義一様収束．

注意 3.5. Hardy 空間 $\mathcal{H}^1$ に属する関数 $f$ は条件 (1.7) を満たす．従って，上で述べたように $f \geqslant 0$ という条件を課すとそのような関数 $f \in \mathcal{H}^1$ は $f \equiv 0$ しかない．Hardy 空間に関しては [5, 8] を参照されたい．

注意 3.6. 定理 3.3 は，空間 2 次元において作用素 $(-\Delta)^{-1} := \mathcal{F}^{-1}|\xi|^{-2}\mathcal{F}$ の $\mathcal{H}^1$ への制限 $(-\Delta)^{-1}{}_{|\mathcal{H}^1}$ は合成積をとる作用素 $(-\frac{1}{2\pi}\log|x|)*$ と等しいことを述べている．実際，(3.1) に $f_x(y) := f(x+y)$ を代入すると分かる．また，このことから $(-\Delta)^{-1}$ が $\mathcal{H}^1$ から BMO への有界作用素であることが (2.3) の証明と同様の議論によって直ちに分かる．これは良く知られた事実であり，Triebel-Lizorkin 空間に対する埋め込みからも示すことができる．実際，$(-\Delta)^{-1} : \mathcal{H}^1 \simeq \dot{F}^0_{12} \to \dot{F}^2_{12} \hookrightarrow \dot{F}^0_{\infty 2} \simeq \mathrm{BMO}$. これらの関数空間については，[3, 6, 7, 8] を参照．とくに，[3] では BMO 空間，Hardy 空間などが Besov 空間と Triebel-Lizorkin 空間の枠組みを用いて包括的に取り扱われている．

## 3.2 (1.10) の解の収束

続いて (1.10) の解の極限を考察する．方程式 (1.10) に関しては文献 [1] が詳しい．

**定理 3.7.** $f$ はある $p_0 \in (1,2)$ に対して $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^2)$ であると仮定する．$P$ を (2.1) で定まる (1.1) の解とし，$R_r$ を

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{B_r} f(y)\log\frac{|x-y|}{\sqrt{\frac{|x|^2|y|^2}{r^2} - 2x\cdot y + r^2}}dy$$

で定まる (1.10) の解とする．$\widetilde{R}_r$ で $R_r$ の $\mathbb{R}^2$ へのゼロ拡張を表す．$r \to \infty$ のとき以下が成立．

- $\widetilde{R}_r(x) - \widetilde{R}_r(0)$ は $P(x)$ に広義一様収束．
- 任意の $q \in [p_0^*, \infty]$ に対し，$\nabla\widetilde{R}_r(x)$ は $\nabla P$ に $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 収束．

*Proof.* $x \in B_r$ のとき

$$\begin{aligned} R_r(x) - R_r(0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{B_r}\log\left(\frac{|x-y|}{|y|}\right)f(y)dy \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_{B_r} f(y)\log\left(\frac{|x|^2|y|^2}{r^4} - \frac{2x\cdot y}{r^2} + 1\right)dy \end{aligned}$$

と書けることに注意する．右辺を $I_1 + I_2$ とおく．

有界集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ をひとつとり固定する．$r_0$ を $\Omega \subset B_{r_0}$ となるように選ぶ．$r \to \infty$ の極限を考えたいので $r \geqslant 2r_0$ としてよい．このとき，

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\Omega} |\nabla(P - I_1)(x)| &\leqslant \sup_{x\in\Omega} C \left| \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_r} \frac{x-y}{|x-y|^2} f(y)dy \right| \\ &\leqslant C \left\| (|y| - r_0)^{-1} \right\|_{L^{p_0'}(|y|\geqslant r)} \|f\|_{L^{p_0}}\end{aligned}$$

が成立する．$p_0 < 2$ より $p_0' > 2$ となることに注意すると，右辺は $r \to \infty$ のとき 0 に収束することがわかる．$P(0) = I_1(0) = 0$ だから，$r \to \infty$ のとき $\|P - I_1\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ となる．一方，

$$\begin{aligned}|I_2(x)| &\leqslant C \log \left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{-1} \int_{B_r} |f(y)|dy \\ &\leqslant C \left( \frac{1}{r} \log \left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{-r} \right) |B_r|^{1-\frac{1}{p_0}} \|f\|_{L^{p_0}} \\ &\leqslant C \log \left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{-r} r^{1-\frac{2}{p_0}} \|f\|_{L^{p_0}}\end{aligned}$$

という評価が成立する．ここで $x \in \Omega$ に対して

$$\lim_{r\to\infty} \log \left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{-r} = e^{|x|} \leqslant e^{r_0}$$

という一様な評価が得られるので，$r \to \infty$ のとき $\|I_2\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ であることがわかる．以上で $r \to \infty$ のとき $\widetilde{R}_r(x) - \widetilde{R}_r(0)$ が $P(x)$ に広義一様収束することが示された．$\nabla R_r$ の $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 収束も同様の議論で証明できる． □

**謝辞**

本稿を書くにあたって，澤野嘉宏氏には原稿の不備を指摘していただき，また参考となる文献についてご教示いただいた．この場を借りてお礼申し上げたい．

## 参考文献

[1] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition.

[2] S. Masaki, *Local existence and WKB approximation of solutions to Schrödinger-Poisson system in the two-dimensional whole space*, Comm. Partial Differential Equations, to appear.

[3] 澤野嘉宏，ベゾフ空間論，日本評論社より近刊.

[4] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[5] ______, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[6] H. Triebel, *Fractals and spectra*, Monographs in Mathematics, vol. 91, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, Related to Fourier analysis and function spaces.

[7] ______, *The structure of functions*, Monographs in Mathematics, vol. 97, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[8] A. Uchiyama, *Hardy spaces on the Euclidean space*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Tokyo, 2001, With a foreword by Nobuhiko Fujii, Akihiko Miyachi and Kôzô Yabuta and a personal recollection of Uchiyama by Peter W. Jones.